

# Wie funktionieren Achromat und Apochromat?

## Teil 1: Von der Einzellinse zum Achromaten

VON VOLKER WITT

Ein Refraktor stellt für viele Amateure die erste Wahl unter den Teleskopen dar. Welche optischen Gegebenheiten zu den besonderen Leistungsmerkmalen eines Achromaten, Halbapochromaten oder Apochromaten führen, soll in diesem zweiteiligen Bericht dargestellt werden.

**W**arum musste Christian Huygens, als er 1675 in Paris zusammen mit Giovanni Domenico Cassini den Saturn beobachtete zu einem Fernrohr von mehr als elf Metern Länge greifen, warum gar errichtete der Danziger Astronom Johannes Hevel (1611–1687) vor den Toren seiner Stadt ein derart unhandliches Fernrohr von fast 45 Metern Länge?

Nun, das achromatische Objektiv war zu dieser Zeit noch nicht erfunden, und die Objektive dieser Fernrohre bestanden aus einfachen Sammellinsen, deren hauptsächlichster Mangel ihre große Farbzerstreuung war. Die Bilder der beobachteten Objekte waren folglich von auffälligen Farbsäumen umgeben, die naturgemäß auch die erreichbare Auflösung einschränkten.

Die einzig mögliche Strategie zur Vermeidung des großen Farbfehlers sahen die Instrumentenbauer des 17. Jahrhunderts darin, das Öffnungsverhältnis ihrer Instrumente drastisch zu verringern. Das führte dazu, dass sie bei vorgegebener Öffnung der Fernrohre deren Brennweite und damit auch ihre Länge immer mehr vergrößern mussten.

### Der Achromat wird erfunden

Erst der wohlhabende Engländer Chester Moor Hall (1703–1771), ein Jurist und Liebhaberastronom, konnte auf der Grundlage von Versuchen, die er ab 1729 mit Prismen aus verschiedenen Glasarten durchführte, um das Jahr 1733 das erste achromatische (»farbfehlerfreie«) Objektiv herstellen. Dieses aus einer konvexen Kronglas- und einer kon-

kaven Flintglaslinse bestehende System hatte bei einer Öffnung von 2,5 Zoll eine Brennweite von 20 Zoll (ca. 50 cm).

Eine von dem bekannten Londoner Instrumentenbauer Jesse Ramsden (1735–1800) überlieferte Anekdote berichtet, dass Hall – um das Geheimnis seiner Erfindung zu wahren – den Schliff der beiden Einzellinsen bei zwei verschiedenen Londoner Optikern in Auftrag gab. Diese leiteten nun zufällig ihre Aufträge an denselben Linsenschleifer namens George Bass weiter, dem natürlich sofort auffiel, dass die Kronglaslinse und die aus dem selten verlangten Flintglas zu fertigende Linse für denselben Auftraggeber bestimmt waren.

Die Anregung zu seiner Erfindung bezog Hall aus einer damals weit verbreiteten Meinung, dass das menschliche Auge deswegen frei von Farbfehlern sei, weil es sich aus unterschiedlich brechenden Medien zusammensetzt. Diese Ansicht wurde schon um 1695 von David Gregory in seinem in Oxford erschienenen Werke »Catoptricae et dioptricae sphaerae elementa« vertreten. Sinngemäß schreibt er dort: »Es würde vielleicht nützlich sein, das Objektiv eines Fernrohrs aus verschiedenen Medien zusammensetzen, wie wir es bei dem Auge von der Natur getan sehen, die niemals eine Sache umsonst unternimmt«.

Der damals unangefochten als wissenschaftliche Autorität geltende Isaac Newton (1642–1727) hatte allerdings schon die chromatische Aberration (den Farbfehler) des Auges nachgewiesen, und er war im Übrigen der Meinung, dass es keine achromatischen Linsensysteme geben

könne, da nach seiner Ansicht bei allen Gläsern die Farbzerstreuung der Brechkraft des Materials proportional sei. Diesem wissenschaftlichen Irrweg verdanken wir aber die Erfindung des Newtonschen Spiegelteleskops, in dem der Forscher damals den einzigen Ausweg aus dem vermeintlichen Dilemma sah.

Da Hall seine Erfindung in der Öffentlichkeit nicht bekannt gemacht hatte, blieb sie weitgehend unbeachtet, und erst 25 Jahre später, nämlich im Jahre 1758 ließ sich John Dollond (1706–1761) ein Patent erteilen auf »A new method of making the object glasses of refracting telescopes by compounding mediums of different refractive qualities...«. Wenn auch das Patent mit Rücksicht auf Hall (erfolglos) angefochten wurde, so konnten nun John Dollond und sein Sohn Peter den Ruhm für die Erfindung und erfolgreiche Vermarktung der achromatischen Objektive einheimen.

Ein weiterer Meilenstein in der Entwicklung der achromatischen Fernrohr-objektive wurde durch Joseph Fraunhofer und seine Münchner Werkstatt gesetzt. Durch eine revolutionäre Technik neuer Glasschmelzverfahren und durch eine mit wissenschaftlicher Akribie eingeführte Bestimmung der Glaskonstanten konnte Fraunhofer Objektive fertigen, die an Qualität und Größe unübertroffen waren. Der Refraktor der Sternwarte in Dorpat (heute Tartu, Estland) aus dem Jahre 1824 mit 9 Zoll Öffnung oder das von Friedrich Wilhelm Bessel in Auftrag gegebene Heliometer für die Sternwarte in Königsberg sind berühmte Beispiele für die exzellente Qualität der in der Fraunhoferschen Werkstatt gefertigten Instrumente.

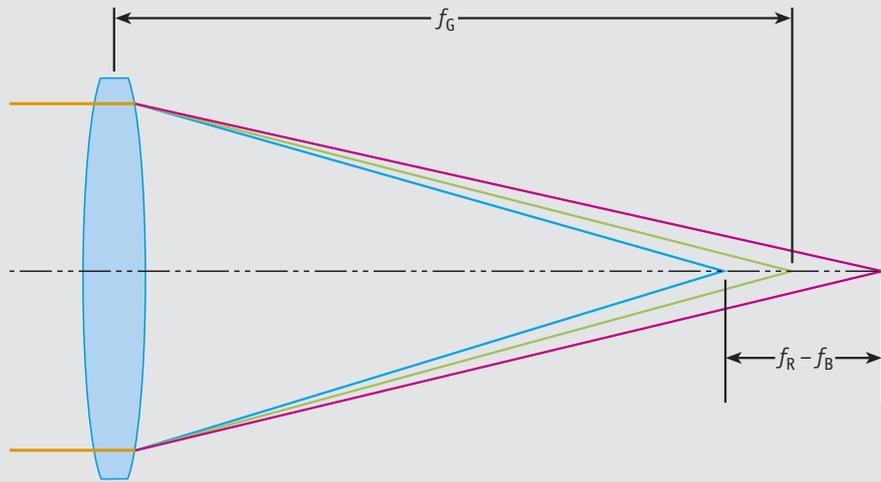
### Die Einzellinse und ihr Farbfehler

Im Prinzip könnte das Objektiv eines Fernrohrs aus einer einzigen Sammellinse bestehen, wie man sie ja früher ger-

▶ Abb. 1: Farblängsfehler einer Einzellinse.

▼ Tabelle 1: Zur Definition roten, grünen und blauen Lichts.

Farbe	Linie	Wellenlänge [nm]	Element
Blau	F'	480.0	Cadmium
Grün	e	546.1	Quecksilber
Rot	C'	643.8	Cadmium



ne in Schülerversuchen zur Herstellung eines so genannten »Brillenglas-Fernrohrs« verwendet hatte. Wer jemals einen Blick durch ein solches einfaches Fernrohr geworfen hat, wird sich sicher an die beeindruckenden Farbsäume erinnern, die jedes der beobachteten Objekte umgaben. Man spricht hierbei von chromatischer Aberration. Das in Abb. 1 gezeigte Beispiel stellt den Farblängsfehler, das heißt die chromatische Längsaberration dar.

Wie bei einem Prisma werden die aus dem Unendlichen kommenden Strahlen weißen Lichts in die einzelnen Spektralfarben aufgespalten, für die die Linse unterschiedliche Brennweiten besitzt. Die kürzeste Brennweite  $f_B$  ergibt sich für blaues Licht, die längste Brennweite  $f_R$  für rotes. Zwischen diesen beiden Extremen liegt die mittlere Brennweite  $f_G$  für grünes Licht, für das das menschliche Auge aufgrund seiner anatomischen Eigenschaften am empfindlichsten ist. Die Brennweitendifferenz  $\Delta f = f_R - f_B$  wollen wir als Farblängsfehler bezeichnen und im Folgenden berechnen.

Im Physikunterricht hat man gelernt, dass sich die Brennweite  $f$  einer (dünnen) Linse aus den Radien  $r_1$  und  $r_2$  der Vorder- und Rückfläche aus Gleichung (1) berechnen lässt:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = F \quad (1)$$

Hierin bedeuten  $F$  die Brechkraft der Linse und  $n$  die Brechzahl (Brechungsindex) des verwendeten Glases für eine mittlere Wellenlänge, etwa grünes Licht. Wir formulieren die Gleichung (1) nun einmal für blaues Licht (Brennweite  $f_B$ , Brechzahl  $n_B$ ) und zum Anderen für rotes Licht (Brennweite  $f_R$ , Brechzahl  $n_R$ ) und subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander:

$$\frac{1}{f_B} - \frac{1}{f_R} = \frac{f_R - f_B}{f_B f_R} = (n_B - n_R) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Medium	Kurzbezeichnungen	$n_e$	Abbesche Zahl $\nu$
(Bor-)Kronglas	BK7	1.518590	63.86
Flintglas	F2	1.624100	36.09
Schwerflint	SF11	1.791920	25.52
Calciumfluorid (Fluss-Spat, Fluorit)	CaF <sub>2</sub>	1.434947	94.59

Setzt man im Nenner für das Produkt  $f_B f_R \approx f_G^2$ , so entsteht die Gleichung

$$\frac{f_R - f_B}{f_G^2} = (n_B - n_R) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für die Brennweite  $f_G$  von grünem Licht gilt aber ebenso die Gleichung (1):

$$\frac{1}{f_G} = (n_G - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

In die letzte Gleichung eingesetzt ergibt sich damit:

$$\frac{f_R - f_B}{f_G} = \frac{n_B - n_R}{n_G - 1}$$

Durch Umformen erhält man schließlich

$$\Delta f = f_R - f_B = \frac{f_G}{(n_G - 1)(n_B - n_R)} = \frac{f_G}{\nu} \quad (2)$$

wobei  $\nu$  eine wichtige Glaskonstante, die so genannte Abbesche Zahl darstellt:

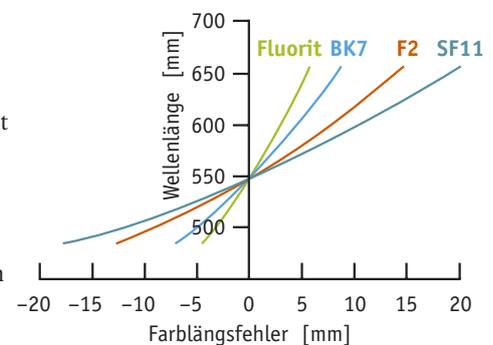
$$\nu = \frac{n_G - 1}{n_B - n_R} \quad (3)$$

Die Abbesche Zahl (sprich »nü«) ist ein Maß für die Farbzerstreuung (relative Dispersion) eines optischen Mediums und ist eine wichtige Kenngröße für die Berechnung achromatischer Linsensysteme.

Ergänzend sei hinzugefügt, dass für die Farben Blau, Grün und Rot natürlich genau definierte Wellenlängen einzusetzen sind, die bestimmten Spektrallinien von Cadmium bzw. Quecksilber (teilweise auch Wasserstoff oder Helium) entlehnt sind. Die Zuordnung gibt die Tabelle 1 wieder.

▶ Tabelle 2: Abbe-Zahlen verschiedener Glassorten.

▼ Abb. 2: Farblängsfehler einer Einzellinse mit 1000 mm Brennweite.



Bezieht man die Abbesche Zahl auf diese drei aufgeführten Wellenlängen, so folgt hierfür:

$$\nu = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \quad (3a)$$

Die Verwendung der grünen e-Linie als »mittlere« Wellenlänge statt der oft anzutreffenden gelben d-Linie (bei 587.6 nm) ist wegen der größten Empfindlichkeit des Auges für grünes Licht sinnvoll. Aus Gleichung (3a) ersieht man, dass die Abbesche Zahl um so größer ist, je kleiner die Differenz der Brechzahlen  $n_{F'} - n_{C'}$ , je kleiner also auch die Farbzerstreuung eines optischen Mediums ist. In der Tabelle 2 sind für einige häufig verwendeten Gläser neben der Brechzahl  $n_e$  für die Wellenlänge 546.1 Nanometer auch die Werte von  $\nu$  angegeben.

Aus Gleichung (2) geht nun hervor, dass der Farbblängsfehler  $\Delta f$  einer Einzellinse umgekehrt proportional zu  $\nu$  ist

$$\Delta f = \frac{f}{\nu} \quad (2a)$$

wobei  $f$  eine mittlere Wellenlänge im grünen Spektralbereich sein soll.

Für den Farbblängsfehler gilt also die einfache Beziehung »mittlere Brennweite geteilt durch Abbesche Zahl«. Einen relativ kleinen Farbblängsfehler haben demnach Linsen aus Material mit hoher Abbe-Zahl. Am günstigsten würde hierbei laut der Tabelle 2 das teure und aufwändig zu verarbeitende Material Fluorit (Fluss-Spat,  $\text{CaF}_2$ ) abschneiden. Konträr dazu verhalten sich die mit Bleioxid ( $\text{PbO}$ ) angereicherten Flint- und Schwerflintgläser mit großer Dispersion.

In Abb. 2 ist für die in der Tabelle aufgelisteten Materialien der Farbfehler einer Einzellinse mit 1000 Millimeter Brennweite in Abhängigkeit von der Wellenlänge dargestellt.

Würde man beispielsweise für das Objektiv eines Refraktors eine Einzellinse von 1000 Millimeter nomineller Brennweite aus dem viel verwendeten Kronglas BK7 nehmen, so hätte dieses Objektiv im Blauen eine Brennweite von 993 Millimeter und im Roten von 1008 Millimeter, was einem Farbblängsfehler von 15 Millimeter entspricht. Diesen Wert finden wir auch durch Anwendung von Gleichung (2a) für das Glas BK7:  $\Delta f = 1000 \text{ mm} / 63.86 \approx 15 \text{ mm}$ .

Angenommen, ein solches Objektiv habe einen Durchmesser von 100 Millimeter, also ein Öffnungsverhältnis von  $f/10$ , und man würde das Okular auf eine mittlere Position zwischen Blau und Rot, also auf das »grüne« Bild etwa eines Sterns fokussieren, so wäre dieser von einem blau-roten Halo umgeben, dessen Durchmesser sich leicht berechnen lässt.

Nach dem Strahlensatz finden wir dafür » $\Delta f/2$  mal Öffnungsverhältnis« =  $7.5 \text{ mm} \times 1:10 = 0.75 \text{ mm}$ . Dieser Wert ist untragbar hoch, ein derartiger Refraktor wäre für vernünftige Beobachtungen völlig untauglich. Im Vergleich zum Beugungsscheibchen eines beugungsbegezt abbildenden Objektivs gleicher Öffnung hätte das Zerstreungsscheibchen der Einzellinse einen mehr als 50-mal so großen Durchmesser.

### Die Achromasiebedingung

Durch Kombination von Linsen mit verschiedener Abbe-Zahl lässt sich erfreulicherweise der Farbfehler drastisch reduzieren. In der Regel kombiniert man eine Sammellinse aus Kronglas (gerin-

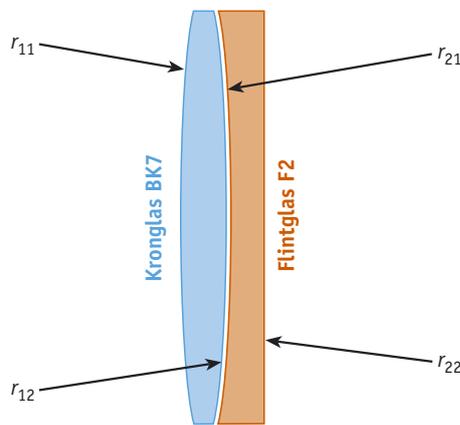
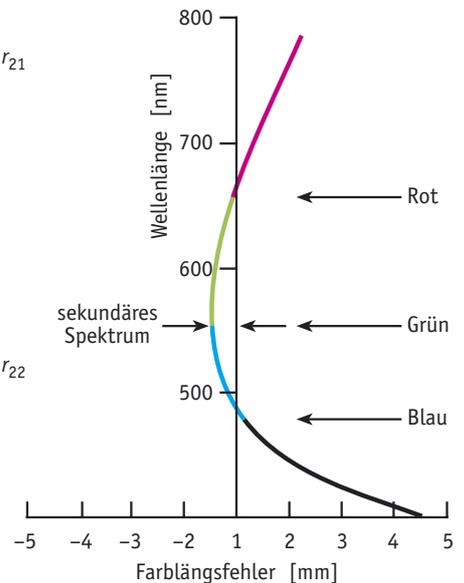


Abb. 3: Sekundäres Spektrum eines 100-mm/1000-mm-Fraunhofer-Achromats (E-Objektiv).



ge Farbzerstreuung, große Abbe-Zahl) mit einer Zerstreulinse aus Flintglas (große Farbzerstreuung, kleine Abbe-Zahl). Wegen des umgekehrten Vorzeichens kompensiert die Farbzerstreuung der Zerstreulinse diejenige der Sammellinse, und sie tut es wegen der größeren Dispersion schon bei einer geringeren Brechkraft, so dass von der positiven Brechkraft der Sammellinse noch genügend »übrig« bleibt, um ein sammelndes System, ein Achromat, zu bilden.

Um die Bedingungen dafür noch etwas genauer formulieren zu können, müssen wir wieder etwas Mathematik betreiben. Unter Verwendung von Gleichung (1) können wir den Brechkraftunterschied  $\Delta F$  einer Linse für zwei verschiedene Farben, die einen Farbblängsfehler  $\Delta f$  erzeugen, folgendermaßen schreiben:

$$\Delta F = \frac{1}{f} - \frac{1}{f + \Delta f} = \frac{\Delta f}{f(f + \Delta f)}$$

Vernachlässigt man im Nenner der rechten Seite die kleine Größe  $\Delta f$  gegenüber  $f$ , so erhält man

$$\Delta F = \frac{\Delta f}{f^2}$$

und mit Gleichung (2a) ergibt sich

$$\Delta F = \frac{1}{f \nu} = \frac{F}{\nu}$$

Soweit es sich um dünne Linsen mit kleinem Abstand handelt, dürfen wir die Brechkraften  $F_1$  der Sammellinse und  $F_2$  der Zerstreulinse addieren, um die Gesamtbrechkraft  $F$  des Achromats zu berechnen:  $F = F_1 + F_2$ .

Achromasie bedeutet, dass die Brechkraft des Systems und somit auch seine Brennweiten für rotes und blaues Licht gleich sein sollen. Dann muss aber auch die Summe der Brechkraftunterschiede

$\Delta F_1$  und  $\Delta F_2$  der beiden Linsen für rotes und blaues Licht Null sein:

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = 0$$

oder

$$\frac{F_1}{\nu_1} + \frac{F_2}{\nu_2} = 0 \quad (4)$$

Dies ist die berühmte Achromasiebedingung. Da die Abbe-Zahl  $\nu$  stets größer als Null ist, kann Gleichung (4) nur erfüllt werden, wenn die Brechkraften  $F_1$  und  $F_2$  entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn also eine der beiden Linsen zerstreuend wirkt. Außerdem kann das betreffende Linsensystem nur dann eine Brechkraft  $> 0$  haben, wenn  $\nu_1 \neq \nu_2$  ist.

### Der Fraunhofer-Achromat

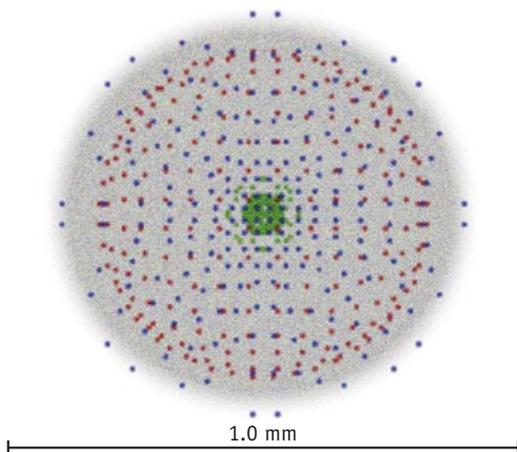
Der klassische Achromat ist nach Joseph Fraunhofer benannt. Die sammelnde Frontlinse besteht aus Kronglas (BK7), die Zerstreulinse aus dem stärker farbzerstreuenden Flintglas (F2), zwischen beiden Linsen befindet sich ein Luftspalt, der auch noch die Korrektur von Öffnungsfehler und Koma ermöglicht. Dieses Objektiv kann mit einem Öffnungsverhältnis bis 1:10 bei einem Durchmesser um die 100 Millimeter relativ preiswert hergestellt werden und erreicht dabei schon eine gute Leistung. Der Farbblängsfehler ist für blaues und rotes Licht behoben, das heißt die Brennpunkte des Achromats fallen für diese Wellenlängen zusammen. Die Fehlerkurve verläuft wie im Beispiel der Abb. 3 in Form eines »C« für einen großen Bereich des sichtbaren Spektrums in typischer Weise nahe der Null-Linie (senkrechte Achse).

Es verbleibt ein Farbblängsrestfehler von etwa 0.5 Millimeter, das sogenannte sekundäre Spektrum, das aber lediglich etwa  $1/2000$  der Brennweite beträgt. Die Brennweite dieses Achromats ist also

Lens: E-Objektiv					Efl	1.0004e+03
Ent beam radius		50.000000	Field angle	5.7296e-05	Primary wavln	0.587000
SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS	GLASS	SPECIAL	
OBJ	0.000000	1.0000e+20	1.0000e+14	AIR		
AST	650.600000	10.800000	50.000000	BK7	C	
2	337.000000	1.100000	50.000000	AIR		
3	-340.100000	8.300000	50.000000	F2	C	
4	-1.2553e+03	0.000000	50.000000	AIR		
IMS	0.000000	989.821945	0.015823	S		

$r_{11}$   
 $r_{12}$   
 $r_{21}$   
 $r_{22}$

Einzellinse BK7



E-Objektiv

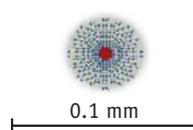


Abb. 4: Eingabemaske des Programms Oslo für die Kenngrößen des Linsensystems. Die Strecken sind in Millimetern angegeben.

Abb. 5: Spot-Diagramm (Punktbild) für eine Einzellinse aus BK7 und für das E-Objektiv. In beiden Fällen beträgt die Brennweite 1000 mm (Öffnungsverhältnis 1:10). Man beachte den unterschiedlichen Maßstab der beiden Diagramme.

für grünes Licht um 0.5 Millimeter kürzer als für rotes oder blaues.

Bei der visuellen Beobachtung mit einem solchen Objektiv würde man den »besten« Fokus bei einer mittleren Wellenlänge von etwa 550 Nanometer – also im Grünen – einstellen, wo das Auge seine größte Empfindlichkeit besitzt. Die geringfügigen Abweichungen für rotes oder blaues Licht fallen dann wegen der geringeren Empfindlichkeit des Auges bei diesen Wellenlängen kaum mehr ins Gewicht. Im Allgemeinen sollte beim Entwurf des Achromaten der Scheitel der Fehlerkurve zu derjenigen Wellenlänge verlegt werden, wo der entsprechende »Empfänger« – sei es Auge, Photoemulsion oder CCD – die maximale Empfindlichkeit hat.

Für die Berechnung eines solchen Systems, das »Lens Design«, stehen heute sehr leistungsfähige Programme zur Verfügung, die man teilweise auch als Freeware aus dem Internet herunterladen kann. Das E-Objektiv der Abb. 3 wurde mit dem kostenlosen und sehr empfehlenswerten Programm OSLO-EDU (Lambda Research Corporation, [www.lambdares.com](http://www.lambdares.com)) gerechnet. Die Kenngrößen (»Surface Data«) des Systems wie die Radien der Linsenflächen, ihre Abstände und die Glaskonstanten werden in eine Datenmaske (»Spreadsheet«) eingegeben, die Abb. 4 zeigt.

In der ersten Spalte sind die Radien  $r_{11}$  und  $r_{12}$  der Kronglaslinse beziehungsweise  $r_{21}$  und  $r_{22}$  der Flintglaslinse eingetragen. Die zweite Spalte enthält die Abstände

der Linsenflächen untereinander, und in der Spalte »Glass« kann man die benötigten Glaskonstanten direkt aus einem abrufbaren Glaskatalog (z. B. von Schott) übernehmen. Das Programm stellt leistungsfähige Routinen für die Optimierung eines Linsensystems bereit, man kann aber auch selbst gleichsam spielerisch die Systemparameter über Schieberegler variieren, bis man den besten Korrekturzustand des Objektivs gefunden hat.

Durch Auswahlmeneü erhält man sehr detaillierte Informationen über die vorhandenen monochromatischen Abbildungsfehler (Öffnungsfehler, Astigmatismus, Verzeichnung) wie auch über Farbblängs- und -querfehler. Eine anschauliche Darstellung der Abbildungsleistung eines Systems liefern die Spot-Diagramme, die für den Fall der Einzellinse aus Kronglas BK7 und des Fraunhofer-Achromats aus Abb. 3 gegenübergestellt werden sollen.

Abschließend wollen wir noch prüfen, ob für den als Beispiel gewählten Achromat auch tatsächlich die Achromasiebedingung erfüllt ist. Die Brennweiten der Kronglas- beziehungsweise Flintglaslinse errechnen sich zu  $f_1 = 431.0$  mm und  $f_2 = -754.7$  mm. Die Gleichung (4) lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{f_2}{f_1} = -\frac{v_1}{v_2}. \quad (4a)$$

Setzt man die entsprechenden Daten ein (die Abbeschen Zahlen aus der Tabelle 2),

so ist die obige Gleichung identisch erfüllt und damit die Achromasie des Systems bestätigt:  $-754.7$  mm/431.0 mm =  $-63.86/36.09 \approx -1.75$ .

Bisher wurde hier nur der Farbfehler in Betracht gezogen, es soll aber erwähnt werden, dass beim Achromat auch die monochromatischen Abbildungsfehler – vor allem Öffnungsfehler und Koma – weitgehend korrigiert sind. Welcher Weg nun vom Achromat zum apochromatischen Objektiv führt, soll im Teil 2 dieses Berichts erklärt werden. Hier sind auch Hinweise auf weiterführende Literatur zu finden.

Anmerkung: Streng der Norm gehorchend müsste die hier verwendete bildseitige Brennweite  $f$  eigentlich mit  $f'$  bezeichnet werden. Für die Brechkraft  $F$  wird in der Literatur auch häufig die Bezeichnung  $D$  verwendet. □



**Volker Witt** hat nach dem Studium der Physik auf dem Gebiet der Elektronenmikroskopie promoviert. Seit vielen Jahren unterrichtet er als Dozent angehende

Augenoptiker an der Münchner Fachakademie für Augenoptik in den Fächern Optik und Optometrie. Seit etwa 20 Jahren ist er in der Amateurastronomie aktiv und hat in dieser Zeit zahlreiche Beiträge in SuW veröffentlicht.