

Seminarvortrag zum Thema

# **Optische Geometrie**

## ***Auflösungsvermögen und Betrachtung im Fourierraum***

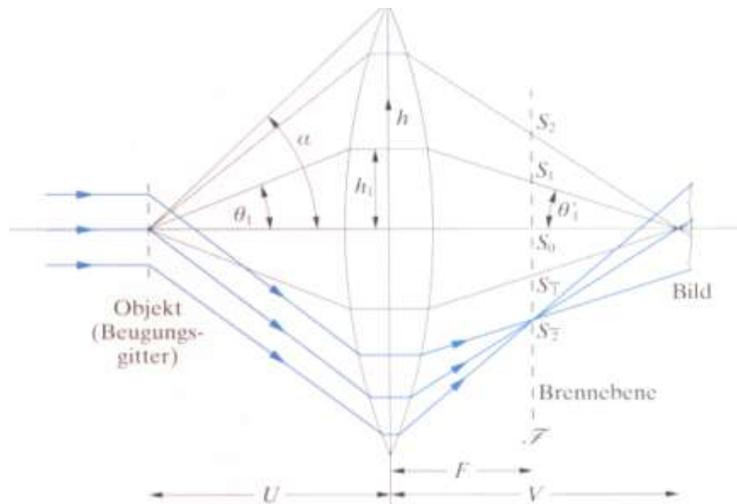
Von Stefan Seidel

23. Oktober 2003

# Inhalt

- Abbe'sche Theorie
- Kreisförmige Apertur
- Airy-Scheibe, Eigenschaften
- Auflösung abbildender Systeme, inkohärent/kohärent beleuchtete Objekte
- Vergleich: Rayleigh/Sparrow-Kriterium
- Abbildung eines periodischen Objekts, Auflösungsvermögen
- Betrachtung im Fourierraum, Linse als Fouriertransformator
- Räumliche Filterung
- Bildbearbeitung

# Beugungstheorie der Bildentstehung, Abbesche Theorie



**Paraxiale Näherung:** man kann jede Beugungsordnung als eine ebene Welle betrachten

Die Bildentstehung kann man sich nun in zwei Schritten vorstellen:

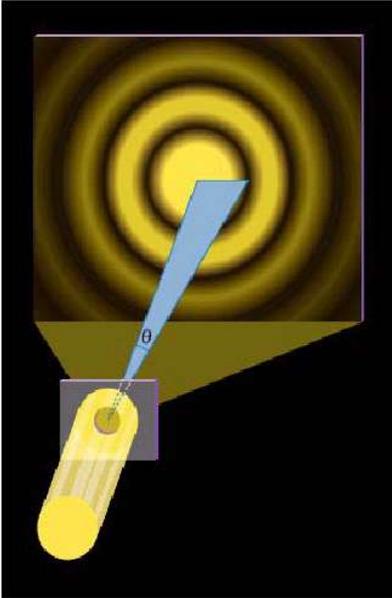
1. Zwischen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{F}$ : Man erhält das Fraunhofersche Beugungsmuster des Objekts in der Ebene  $\mathcal{F}$
2. Zwischen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{J}$ : Die einzelnen Beugungsordnungen  $S$  verhalten sich wie äquidistante Punktquellen, und erzeugen ebenfalls ein Beugungsmuster: das Bild

Die kleinste beobachtbare Struktur des Bildes wird durch die höchste Beugungsordnung, die noch durch die Linse durchgelassen wird, bestimmt.

Eine gute Abbildungsqualität lässt sich außerdem erreichen, wenn das Verhältnis  $\sin \theta / \sin \theta'$  anstelle von  $\theta / \theta'$  für alle  $\theta$  gleich ist.

Dieser Zusammenhang heißt **Abbesche Sinusbedingung**.

# Kreisförmige Apertur



Wenn Licht durch eine kleine runde Öffnung geht entsteht ein kreisförmiges Beugungsmuster am Schirm.  
Der Winkel  $\theta$  beschreibt den ersten dunklen Ring relativ zur Mittenregion.

## Airy-Scheibe

Im Folgenden möchte ich zeigen, wie man die Größe der Airy-Scheibe berechnen kann. Als Ausgangspunkt dient das Kirchhoff'sche Beugungsintegral,

$$\psi(u, v) = \iint f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$$

auf dessen Herleitung ich später noch ausführlich eingehen werde.

Da es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt, verwendet man am besten Polarkoordinaten:

Für die Blende:  $(\rho, \theta)$

damit lässt sich schreiben:  $x = \rho \cos\theta$   $y = \rho \sin\theta$

für das Beugungsmuster:  $(\xi, \Phi)$

damit ergibt sich:  $u = \xi \cos \Phi \quad v = \xi \sin \Phi$

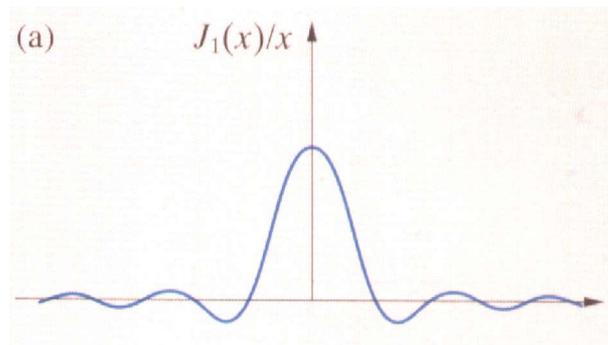
Setzt man alles in das Beugungsintegral ein, ergibt sich:

$$\Rightarrow \psi(u, v) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-i(\rho \xi \cos \phi \cos \theta + \rho \xi \sin \phi \sin \theta)] \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-i\rho \xi \cos(\theta - \phi)] \rho d\rho d\theta$$

Dieses Integral kann mit Hilfe von Bessel-Funktionen gelöst werden und ergibt:

$$\psi(\xi, \phi) = \frac{2\pi R J_1(\xi R)}{\xi} = \pi R^2 \left[ \frac{2J_1(\xi R)}{\xi R} \right]$$



Das Beugungsbild ist rotationssymmetrisch und das zentrale Maximum ist die

*Airy-Scheibe*,

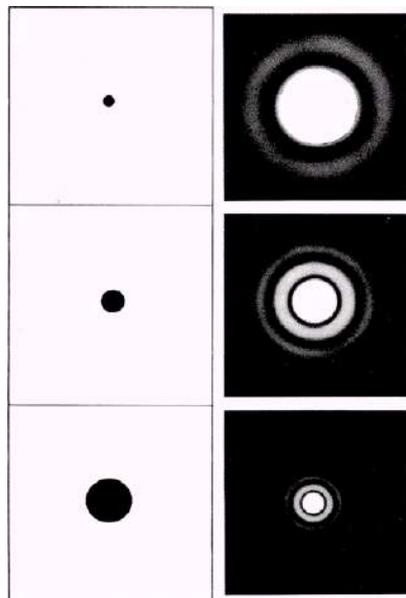


sie reicht bis zur ersten Nullstelle bei  $\xi R = 3.83$

bzw.

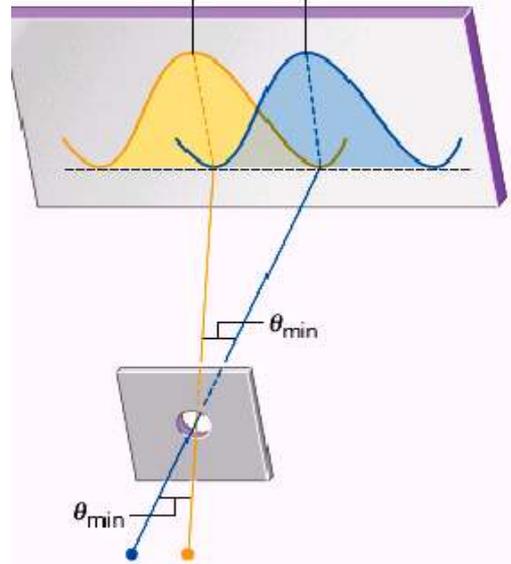
$$\sin \theta = \frac{\xi}{k_0} = \frac{3,83\lambda}{2\pi R} = 1,22\lambda / (2R)$$

Der Radius der Airy-Scheibe ist umgekehrt proportional zum Radius der Lochblende:



# Auflösung abbildender Systeme

Das einfachste und am besten bekannte Auflösungskriterium ist das von Rayleigh formulierte. Es bezieht sich auf ein selbstleuchtendes oder inkohärent beleuchtetes Objekt. Betrachtet man einen einzelnen Objektpunkt, so beobachtet man in der Bildebene das Fraunhofermuster der Aperturblende, dessen Abmessungen von der Bildweite abhängen. Dieses Beugungsmuster wird als Punktantwort bezeichnet. Ein ausgedehntes Objekt kann immer als Ansammlung von Punktobjekten betrachtet werden, wobei jedes Punktobjekt in der Bildebene eine ähnliche Punkt-Antwort erzeugt. Das Rayleigh-Kriterium lässt sich herleiten, indem man zwei benachbarte Punkte des Objekts betrachtet, die einen kleinen Winkelabstand voneinander entfernt sind.



Hat die Aperturblende den Durchmesser  $D=2R$ , so besitzt ihr Beugungsmuster folgende Intensitätsverteilung als Funktion des Winkels:

$$I(\theta) = \left( \frac{2J_1(1/2k_0 D \sin \theta)}{1/2k_0 D \sin \theta} \right)^2$$

Rayleigh nahm an, dass zwei Objektpunkte gerade dann noch zu trennen sind, wenn das zentrale Maximum des einen Beugungsmusters im ersten Minimum des anderen liegt.

Wie wir schon wissen, hat die Funktion  $J_1(x)$  ihre erste Nullstelle bei  $x=3,83$  oder  $x/\pi=1,22$ . Daraus folgt:

$$\frac{1}{2\pi} k_0 D \sin \theta_{\min} = D \sin \theta_{\min} / \lambda = 1,22$$

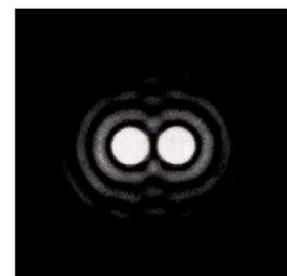
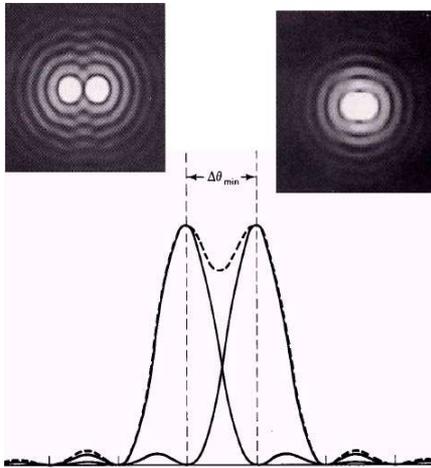


Foto von überlappenden aber noch aufgelösten Beugungsmustern

## Inkohärent beleuchtetes Objekt



Der Winkelabstand  $\theta_{\min}$  ist der minimale Winkelabstand, der noch aufgelöst werden kann.

**Rayleigh Kriterium** für gerade noch aufzulösende Bilder: zentrales Maximum des einen Beugungsmusters auf dem ersten Minimum des anderen:

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

Ein alternatives Kriterium, das vor allem der Eigenschaft des menschlichen Auges, Intensitätsunterschiede gut wahrzunehmen, Rechnung trägt, ist das

**Sparrow-Kriterium**: Zwei Punkte werden als aufgelöst betrachtet, wenn ihre gemeinsame Intensitätsfunktion entlang ihrer Verbindungslinie ein Minimum besitzt. Haben beide Punkte die gleiche Intensität, so ergibt das Sparrow-Kriterium einen Minimalabstand  $\theta_{\min}$ , wenn gilt:

$$\left( \frac{d^2 I}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_{\min}/2} = 0$$

=>

$$\theta_{\min} = 0,95\lambda / D$$

# Kohärent beleuchtetes Objekt

Das Rayleigh-Kriterium ergibt das gleiche Resultat wie vorher, aber die Punkte sind nicht mehr aufgelöst!

Für das Sparrow-Kriterium ergibt sich:

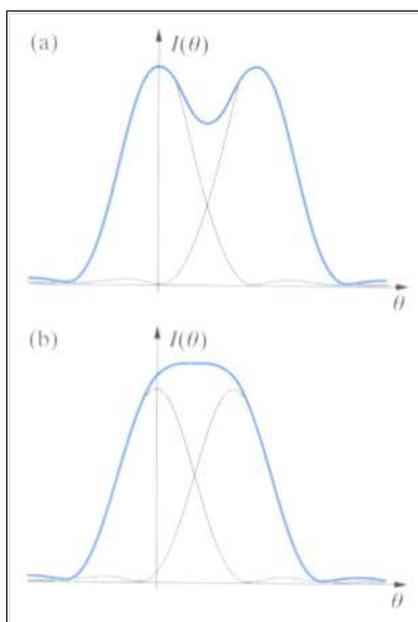
$$\theta_{\min} = 1,46\lambda / D$$

Der Grund ist, dass man die Amplituden vor dem Quadrieren addieren muss, um I zu erhalten.

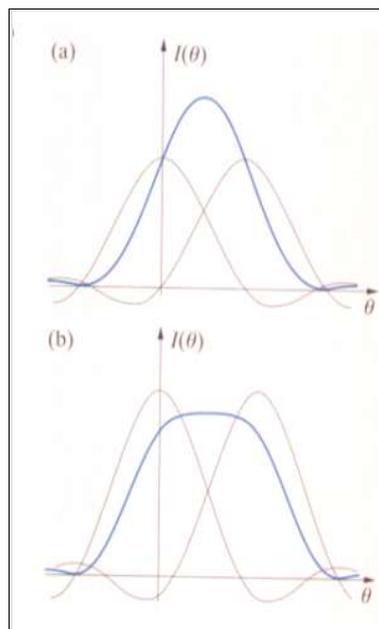
$$I(\theta) = [A(\theta) + A(\theta - \theta_{\min})]^2$$

(im Gegensatz zur inkohärenten Beleuchtung, bei der man jeweils die Einzelamplituden quadriert und dann addiert)

## Vergleich Rayleigh-Sparrow



inkohärent



kohärent

(a) Rayleigh, (b) Sparrow

## Abbildung eines periodischen Objekts:

Das Auflösungsvermögen ist durch die höchste durch den endlichen Durchmesser der Objektivlinse noch zugelassene Beugungsordnung bestimmt.

Betrachtet man ein Objekt mit Periodizität  $d$ , dann erscheint die erste Beugungsordnung unter dem Winkel  $\theta$ , der geg. ist durch

$$\sin\theta_1 = \lambda / d$$

Der halbe Öffnungswinkel  $\alpha$  der Linse muss nun größer sein als  $\theta_1$

daraus folgt für die kleinste abbildbare Periodizität:

$$d_{\min} = \lambda / \sin\alpha$$

Für den Fall, dass sich vor dem Objektiv ein Medium mit dem Brechungsindex  $\mu$  befindet (Wellenlänge im Medium ist dann  $\lambda/\mu$ ), folgt:

$$\Rightarrow d_{\min} = \lambda / (\mu \sin\alpha) = \lambda / (NA)$$

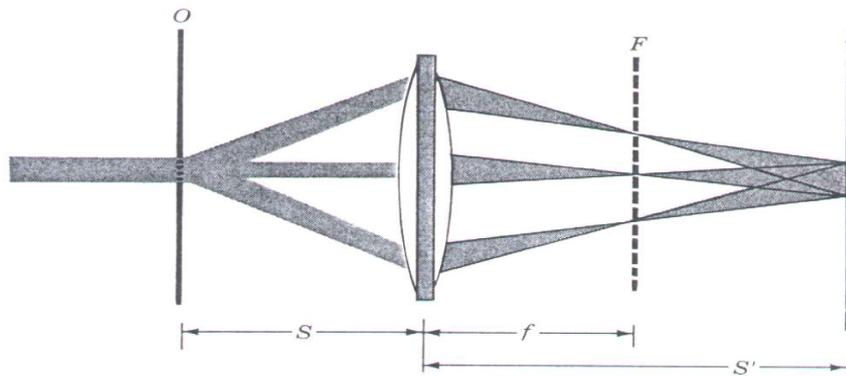
$NA = \mu \sin\alpha$  wird als **Numerische Apertur** bezeichnet.

Man kann das Auflösungsvermögen noch verbessern, indem man mit Licht beleuchtet, das einen Winkel  $\alpha$  zur optischen Achse hat, sodass die nullte Ordnung gerade noch durch gelassen wird. Es ergibt sich:

$$d_{\min} = \lambda / (2\mu \sin\alpha) = \lambda / (2NA)$$

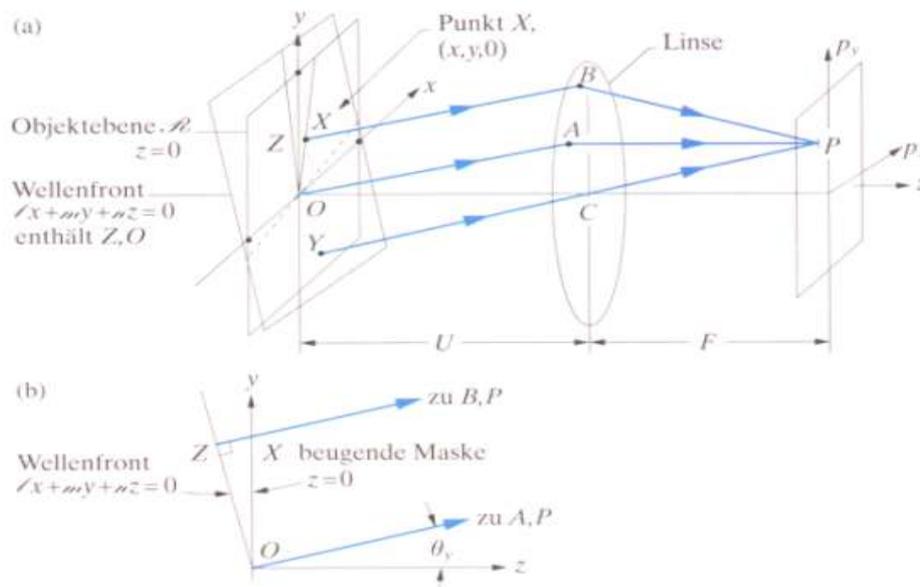
# Betrachtung im Fourierraum

## Linse als Fouriertransformator



Man kann eine Linse als Fouriertransformator betrachten, da sich in der hinteren Brennebene der Linse die Fouriertransformierte des Objekts befindet.

Im Folgenden möchte ich nun zeigen, wie man auf das Beugungsintegral, das ich zu Beginn schon verwendet habe, kommt, und dass es sich dabei wirklich um die Fouriertransformierte des Objekts handelt.



Wir betrachten obige Abbildung. Das einfallende Licht ist hier eine ebene Welle parallel zur optischen Achse (Ausbreitung entlang der z-Achse, senkrechter Lichteinfall). Das Beugungsobjekt befindet sich an der Stelle  $z=0$  und besitzt die *Amplitudentransmissionsfunktion*  $f(x,y)$ .

Alle Lichtwellen, die das Beugungsobjekt unter demselben Winkel verlassen, werden von der Linse in einen Punkt der Brennebene fokussiert. In der Abbildung sind z.B.  $XB$ ,  $OA$  und  $YC$  parallel und werden alle in  $P$  abgebildet. Die Amplitude des Lichts in  $P$  ist deshalb die Summe der Amplituden an den Punkten  $X$ ,  $O$  und  $Y$  usw. jeweils mit dem passenden Phasenfaktor  $\exp(ik_0 \overline{XBP})$  usw.. Hierbei steht  $\overline{XBP}$  für den optischen Weg von  $X$  über  $B$  nach  $P$ .

Nun ist die Amplitude am Punkt  $X=(x,y)$  in der Ebene  $z=0$  einfach die Amplitude der einfallenden Welle (diese setzen wir der Einfachheit halber gleich eins) multipliziert mit der Transmissionsfunktion  $f(x,y)$ . Um den optischen Weg  $\overline{XBP}$  zu berechnen verwenden wir das Fermat'sche Prinzip, das besagt, dass alle optischen Wege von verschiedenen Punkten auf einer Wellenfront zum Brennpunkt gleich sind. Die Richtungen von  $XB$ ,  $OA$ ... sind durch die Richtungskosinusse  $(l,m,n)$  gegeben. Damit ist die dazu senkrechte Wellenfront durch  $O$ , die in  $P$  fokussiert wird, die Ebene

$$lx + my + nz = 0$$

Die optischen Wege von dieser Wellenfront nach  $P$ , dh.  $\overline{OAP}$  und  $\overline{ZBP}$ , sind gleich. Nun ist  $ZX$  die Projektion von  $OX$  auf den Strahl  $XB$ , was durch die Komponente des Vektors  $(x,y,0)$  in der Richtung  $(l,m,n)$  ausgedrückt werden kann:

$$ZX = lx + my$$

Daraus folgt:

$$\overline{XBP} = \overline{OAP} - lx - my$$

Die Gesamtamplitude in  $P$  kann durch Integration von  $f(x,y)\exp(ik_0 \overline{XBP})$  über das Beugungsobjekt berechnet werden:

$$\psi_P = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \iint f(x,y) \exp[-ik_0(lx + my)] dx dy$$

Wir können  $u=lk_0$  und  $v=mk_0$  dazu verwenden, die Position von  $P$  zu beschreiben, und erhalten

$$\Rightarrow \psi(u, v) = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \iint f(x,y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$$

Wir erhalten somit folgendes wichtige Ergebnis:

Das Beugungsmuster der Fraunhofer-Beugung ist somit durch die zwei-dimensionale Fouriertransformation der Transmissionsfunktion  $f(x,y)$  des Beugungsobjekts gegeben.

Beobachtet man Beugungsmuster, misst man die Intensität  $|\psi(u, v)|^2$

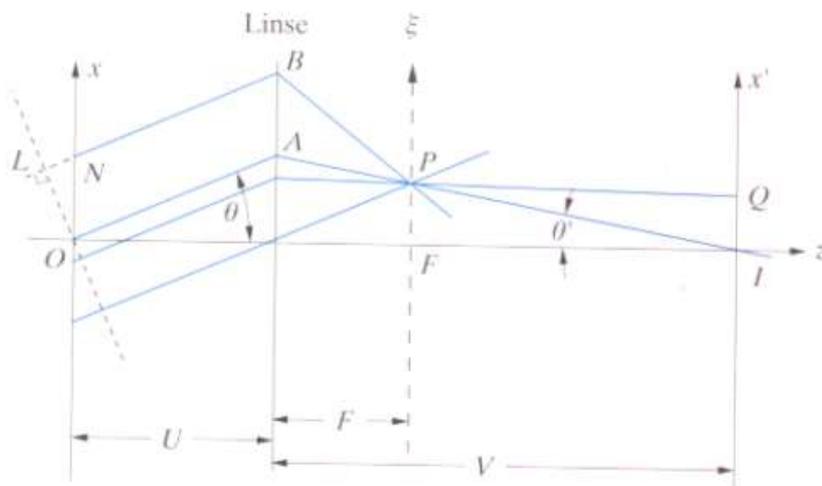
dh., der genaue Wert von OAP ist unwesentlich und kann vernachlässigt werden.

Daraus folgt:

$$\psi(u, v) = \iint f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$$

Dies ist genau das Integral, das ich zu beginn verwendet habe.

Nun muss die Rücktransformation noch erklärt werden.



Das Objekt sei wieder von einer ebenen Welle gleichmässig und kohärent beleuchtet, und die vom Objekt ausgehende Welle sei durch die komplexe Funktion  $f(x)$  dargestellt.

Die Amplitude der Welle in  $P$  ist dann durch die Fouriertransformierte von  $f(x)$  gegeben mit einer Phasenverschiebung, die dem optischen Weg  $OAP$  entspricht.

$$\psi(u) = \exp(ik_0 \overline{OAP}) F(u) = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx$$

wobei  $k_0 = 2\pi/\lambda$  und  $u$  dem Punkt  $P$  entspricht:  $u = k_0 \sin\theta$

den optischen Weg von  $P$  nach  $Q$  kann man schreiben als:

$$\overline{PQ} = \left( \overline{PI}^2 + x'^2 - 2x'\overline{PI} \sin\theta' \right)^{\frac{1}{2}} \approx \overline{PI} - x' \sin\theta'$$

wobei  $x' \ll \overline{PI}$

Ist die Abbesche Sinusbedingung erfüllt, gilt  $\sin\theta = m \sin\theta'$   
( $m$ : Vergrößerung)

daraus folgt:  $\overline{PQ} = \overline{PI} - x'u / (mk_0)$

Für die Amplitude am Punkt  $Q$  gilt:

$$\begin{aligned} b(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \exp(ik_0 \overline{PQ}) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 \overline{PI}) \psi(u) \exp(-ix'u / m) du \end{aligned}$$

Für die Beziehung zwischen Bild und Objekt ergibt sich damit:

$$b(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[ ik_0 \left( \overline{OAP} + \overline{PI} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \right\} \exp(-iux' / m) du$$

der kombinierte Phasenfaktor ist eine Funktion von  $P$  und daher auch von  $u$ , wenn die Ebenen  $O$  und  $I$  willkürlich sind. Wenn sie jedoch **konjugierte Ebenen** sind, dann ist der optische Weg von  $O$  nach  $I$

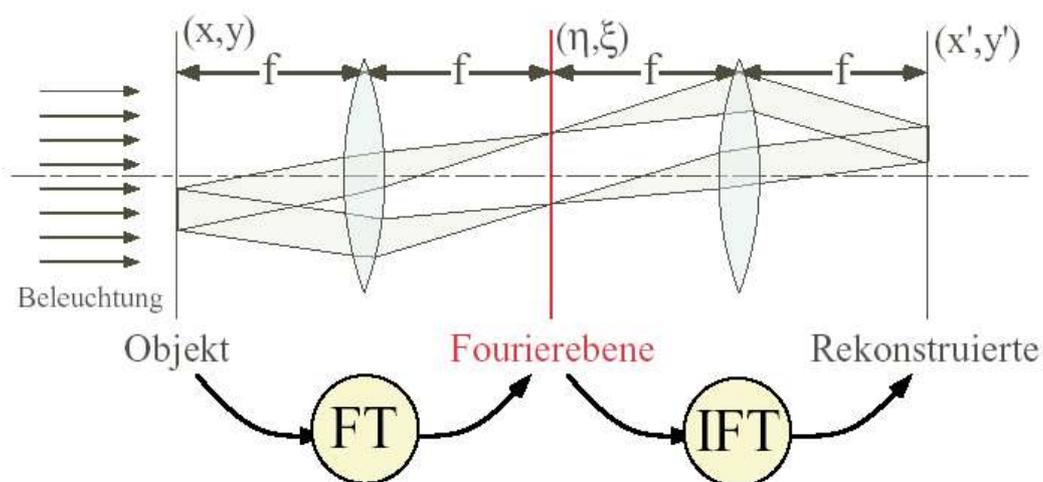
unabhängig vom Punkt P, und man kann schreiben:

$$b(x') = \exp(ik_0 \overline{OI}) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \right] \exp(-iux' / m) du$$

Es folgt:

$$b(x') = \exp(ik_0 \overline{OI}) f(-x' / m)$$

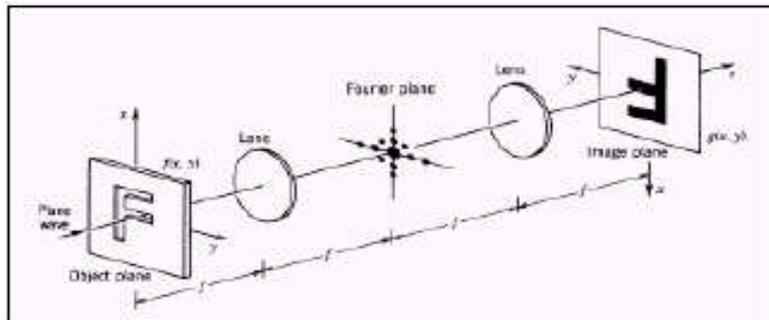
Das Bild ist also eine um den Faktor  $m$  vergrößerte invertierte Kopie des Objekts.



Ein optisches Bild kann also als Fouriertransformierte der Fouriertransformierten des Objekts dargestellt werden.

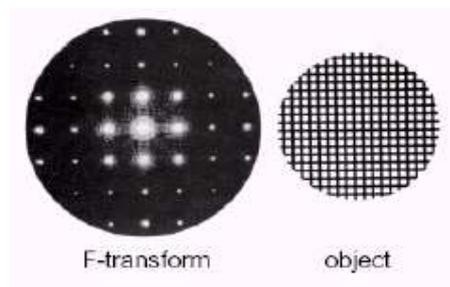
Zum Abschluss möchte ich noch ein Beispiel zur räumlichen Filterung und zur Bildbearbeitung zeigen.

# Räumliche Filterung



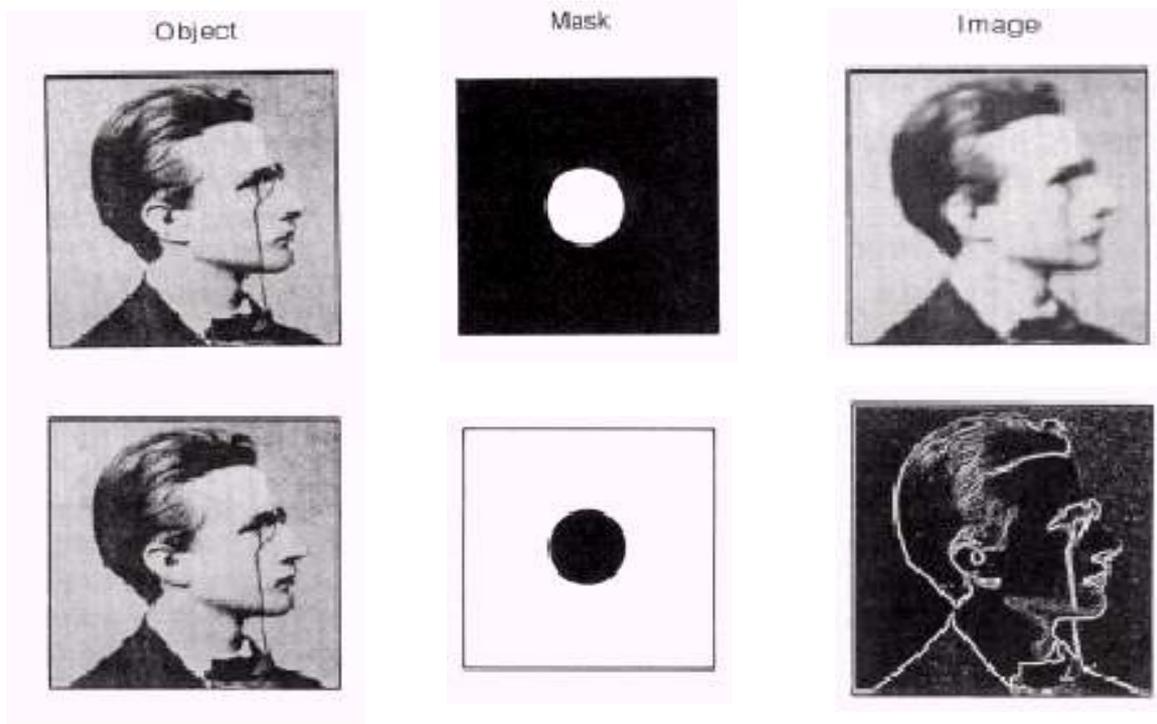
In der Abbildung sieht man nochmal ein Objekt, die beiden Linsen, dazwischen die Fourierebene und das invertierte Bild.

Bei den folgenden Abbildungen handelt es sich jeweils um ein Objekt und seine Fouriertransformierte:



Durch Anbringen von geeigneten Masken und Filtern in der Fourierebene der abbildenden Linse kann man eine *räumliche Filterung* des Bildes vornehmen. Dadurch kann man zB. den Kontrast erhöhen oder erniedrigen, störende Bildelemente unterdrücken oder Kantenüberhöhungen ausführen.

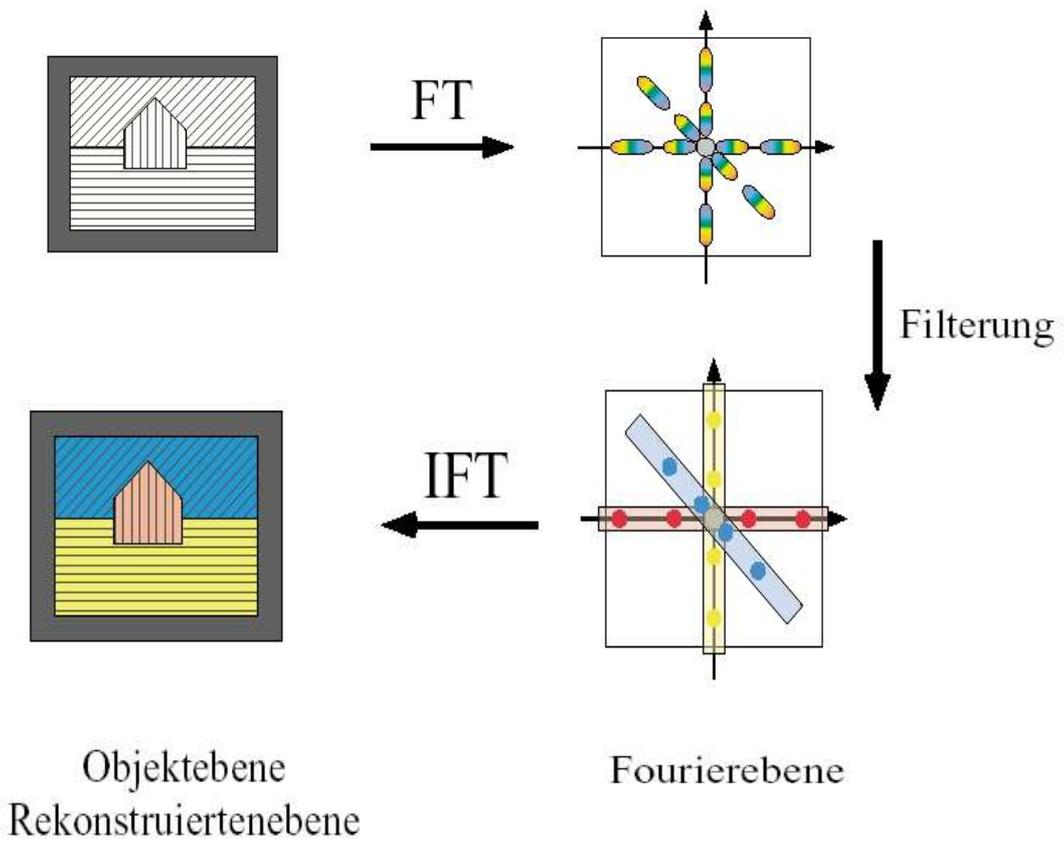
Die Bezeichnung räumliche Filterung wird deshalb verwendet, da in der hinteren Brennebene der abbildenden Linse hauptsächlich das Spektrum der Raumfrequenzen des Bildes vorliegt, das durch Blenden und Filter modifiziert werden kann. Zum Beispiel können die großen Raumfrequenzen durch eine Maske herausgefiltert werden, die somit die Bildebene nicht erreichen können. Eine solche Änderung des Frequenzspektrums eines Bildes nennt man *räumliche Filterung*.



In obigem Beispiel wird zuerst eine Lochblende in die Fourierebene eingebracht. Es werden dann nur noch die niedrigen Raumfrequenzen durchgelassen, die höheren werden herausgefiltert, was zur Folge hat, dass das Bild unscharf wird, und man weniger Details erkennen kann.

In der unteren Hälfte der Abbildung werden die niedrigen Ordnungen ausgeblendet, was zur Folge hat, dass das Bild enorm an Helligkeit verliert, da ja jetzt die nullte Ordnung nicht mehr durchgelassen wird.

Zum Schluss noch ein Beispiel für die Bildbearbeitung:



FT: Fouriertransformation, IFT: Inverse Fouriertransformation

# Literatur

- [1] Lipson, Thanhauser *Optik* (Springer 1997)
- [2] [www.lrz-muenchen.de/~a231202/webserver/webdata/Skripten/Physik3/Gross\\_Physik\\_III\\_Kap\\_7.pdf](http://www.lrz-muenchen.de/~a231202/webserver/webdata/Skripten/Physik3/Gross_Physik_III_Kap_7.pdf)
- [3] [www.physik.uni-muenchen.de/studium/praktikum/pharmazie/versuche/va\\_o2.pdf](http://www.physik.uni-muenchen.de/studium/praktikum/pharmazie/versuche/va_o2.pdf)
- [4] [www.iap.uni-bonn.de/oll/graphik/kap4/gkap4.html](http://www.iap.uni-bonn.de/oll/graphik/kap4/gkap4.html)